29/03/2019

Ευκλείδειοι Χώροι

Έστω E: διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Ένα εσωτερικό γινόμενο επί του E είναι μια απεικόνιση $\langle\, , \rangle : E\times E \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \langle \vec{x},\vec{y}\rangle$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) $\forall \vec{x},\vec{y}\in E : \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \langle \vec{y},\vec{x}\rangle$ (συμμετρία)

$$\left.\begin{array}{l} ②\ \forall \vec{x_1},\vec{x_2},\vec{y}\in E : \langle \vec{x_1}+\vec{x_2},\vec{y}\rangle = \langle \vec{x_1},\vec{y}\rangle + \langle \vec{x_2},\vec{y}\rangle \\ ③\ \forall \vec{x},\vec{y}\in E,\ \forall \lambda\in\mathbb{R} : \langle \lambda\vec{x},\vec{y}\rangle = \lambda\langle \vec{x},\vec{y}\rangle \end{array}\right\} \text{(γραμμικότητα)}$$

4) $\forall \vec{x}\in E : \langle \vec{x},\vec{x}\rangle \geq 0$

και $\langle \vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=0$ (θετικά ορισμένο)

Παρατηρήσεις: ① $\forall \vec{x},\vec{y_1},\vec{y_2}\in E$ και $\lambda\in\mathbb{R}$:

- $\langle \vec{x},\vec{y_1}+\vec{y_2}\rangle = \langle \vec{x},\vec{y_1}\rangle + \langle \vec{x},\vec{y_2}\rangle$

$$\langle \vec{x},\vec{y_1}+\vec{y_2}\rangle \overset{(1)}{=} \langle \vec{y_1}+\vec{y_2},\vec{x}\rangle \overset{(2)}{=} \langle \vec{y_1},\vec{x}\rangle + \langle \vec{y_2},\vec{x}\rangle \overset{(1)}{=} \langle \vec{x},\vec{y_1}\rangle + \langle \vec{x},\vec{y_2}\rangle$$

- $\langle \vec{x},\lambda\vec{y}\rangle \overset{(1)}{=} \langle \lambda\vec{y},\vec{x}\rangle \overset{(3)}{=} \lambda\langle \vec{y},\vec{x}\rangle \overset{(1)}{=} \lambda\langle \vec{x},\vec{y}\rangle$

② $\langle \vec{x},\vec{0}\rangle = \langle \vec{x},\vec{0}+\vec{0}\rangle = \langle \vec{x},\vec{0}\rangle + \langle \vec{x},\vec{0}\rangle \Rightarrow \langle \vec{x},\vec{0}\rangle = 0$

Παρόμοια $\langle \vec{0},\vec{x}\rangle = 0$

③ Αν $\vec{x}\in E$ και αν $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0,\ \forall \vec{y}\in E$, τότε $\vec{x}=\vec{0}$

διότι $\left.\begin{array}{l}\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0,\ \forall \vec{y}\in E \\ \text{θέτουμε } \vec{y}=\vec{x}\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \vec{x}=\vec{0}$

Ορισμός: Ένας Ευκλείδειος χώρος είναι ένα ζεύγος $(E,\langle\, ,\rangle)$ όπου E: $\mathbb{R}$-δ.χ και $\langle\, ,\rangle$: εσωτερικό γινόμενο επί του E.

Παράδειγμα: ① Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-δ.χ :

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \forall \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n\end{array}\right\} : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \overset{\text{ορ}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Ισχυρισμός: $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ είναι ευκλείδειος χώρος

Απόδειξη: Οι ιδιότητες (1)-(3) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό.

Για την (4): $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1 x_1 + \dots + x_n x_n =$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$$

και $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$

$$\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε καλείται συνηθισμένο ή κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$.

② Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-δ.χ $M_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) / A : n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{R}\}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall A = (a_{ij}) \\ \forall B = (b_{ij})\end{array}\right\} \text{ ορίζουμε } \langle A, B \rangle = Tr(A\,{}^tB)$$

① $\langle A, B \rangle = Tr(A\,{}^tB) = Tr[\,{}^t(A\,{}^tB)] = Tr(\,{}^t({}^tB)\,{}^tA)$

$$= Tr(B\,{}^tA) = \langle B, A \rangle$$

② $\langle A_1 + A_2, B \rangle = Tr((A_1 + A_2) \cdot {}^tB) = Tr(A_1\,{}^tB + A_2\,{}^tB)$

$$= Tr(A_1\,{}^tB) + Tr(A_2\,{}^tB) = \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$$

③ $\langle \lambda A, B \rangle = Tr((\lambda A)\,{}^tB) = Tr(\lambda (A\,{}^tB))$

$$= \lambda\, Tr(A\,{}^tB) = \lambda \langle A, B \rangle$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

④ $<A,B> = Tr(A^t B) = \sum_{i=1}^{n} (A^t B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ $\quad (A^t B)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

Άρα : $<A,B> = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

$<A,A> = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$ και

$<A,A> = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{} a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i,j = 1,\dots,n \Leftrightarrow A = 0$

Άρα $(M_n(\mathbb{R}), <,>)$: Ευκλείδειος χώρος

③ Έστω ο $\mathbb{R}$-δ.χ : $\mathbb{R}_n[t] = \{P(t) \mid P(t)$: πολυώνυμο με $\deg P(t) \leq n\} \cup \{0\}$

$\left.\begin{array}{l}\forall P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \\ \forall Q(t) \in \mathbb{R}_n[t]\end{array}\right\}$ ορίζουμε $<P(t), Q(t)> = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$

<u>Ισχυρισμός</u>: $(\mathbb{R}_n[t], <,>)$: Ευκλείδειος χώρος

① $<P(t), Q(t)> = \int_0^1 P(t) Q(t) dt =$

$= \int_0^1 Q(t) P(t) dt = <Q(t), P(t)>$

② $<P_1(t) + P_2(t), Q(t)> = \int_0^1 (P_1(t) + P_2(t)) \cdot Q(t) dt =$

$= \int_0^1 (P_1(t) Q(t) + P_2(t) Q(t)) dt =$

$= \int_0^1 P_1(t) Q(t) dt + \int_0^1 P_2(t) Q(t) dt =$

$= <P_1(t), Q(t)> + <P_2(t), Q(t)>$

③ $<\lambda P(t), Q(t)> = \int_0^1 (\lambda P(t) \cdot Q(t)) dt =$

$= \lambda \int_0^1 P(t) Q(t) dt$

$= \lambda <P(t), Q(t)>$

(4) $\langle P(t), P(t)\rangle = \int_0^1 P(t)\cdot P(t)\,dt = \int_0^1 P(t)^2 \geq 0$ επειδή $P(t)^2 \geq 0$

και $\langle P(t), P(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)^2\,dt = 0 \overset{\text{Αν}\Pi}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow P(t)^2 = 0 \Leftrightarrow P(t) = 0$

Ανάλογα προκύπτουν και οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathbb{R}_n[t], \langle\,,\rangle)$, όπου $\langle P(t), Q(t)\rangle' = \int_a^b P(t)Q(t)\,dt$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

(4) $E = C([0, 2\pi], \mathbb{R}) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f : \text{συνεχής}\}$: $\mathbb{R}$-δ.χ

$\forall f(t), g(t) \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$:

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

Τότε $(C[0, 2\pi], \mathbb{R}), \langle\,,\rangle)$: Ευκλείδειος χώρος.

(5) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-δ.χ $\mathbb{R}_n[t]$ και έστω $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί.

$\forall P(t), Q(t) \in \mathbb{R}_n[t]$: $\langle P(t), Q(t)\rangle =$

$= P(p_0)\cdot Q(p_0) + P(p_1)\cdot Q(p_1) + \ldots + P(p_n)\cdot Q(p_n)$

Ισχυρισμός: $(\mathbb{R}_n[t], \langle\,,\rangle)$: Ευκλείδειος χώρος

Οι ιδιότητες (1)-(3) προκύπτουν άμεσα

Για την (4) : $\langle P(t), P(t)\rangle = P(p_0)^2 + P(p_1)^2 + \ldots + P(p_n)^2 \geq 0$

και $\langle P(t), P(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow P(p_0)^2 + P(p_1)^2 + \ldots + P(p_n)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(p_0) = P(p_1) = \ldots = P(p_n) = 0$

Επειδή $\deg P(t) \leq n$ και ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ έχει το πολύ n το πλήθος ρίζες. Το $P(t)$ έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες $p_0, p_1, \ldots, p_n$ και άρα $P(t) = 0$

(6) Στον $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε: $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)> =$
$= 5x_1y_1 - 2(x_1y_2 + y_1y_2) + x_2y_2$

<u>Ισχυρισμός</u>: $(\mathbb{R}^2, <,>)$: Ευκλείδειος χώρος

Οι ιδιότητες (1)-(3) προκύπτουν εύκολα

Για την (4): $<(x_1,x_2),(x_1,x_2)> = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 =$
$= x_1^2 + 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (2x_1 - x_2)^2 \geq 0$ ως άθροισμα τετραγώνων

<u>και</u> $<(x_1,x_2),(x_1,x_2)> = 0$
$\Leftrightarrow x_1^2 + (2x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow (x_1,x_2) = (0,0)$

<u>Άσκηση</u>: Στον $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε:
$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)> = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$
$(\mathbb{R}^3, <,>)$: Ευκλείδειος χώρος

Έστω $(E, <,>)$ ένας ευκλείδειος χώρος
- Το <u>μήκος</u> ενός διανύσματος $\vec{x} \in E$ ορίζεται να είναι ο <u>μη-αρνητικός αριθμός</u>: $\|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$
δηλαδή: $\|\vec{x}\|^2 = <\vec{x},\vec{x}>$

<u>Ιδιότητες Μήκους</u>: (1) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\|$ διότι: $\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{<\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}>} =$
$= \sqrt{\lambda^2<\vec{x},\vec{x}>} = |\lambda|\sqrt{<\vec{x},\vec{x}>} = |\lambda|\,\|\vec{x}\|$

(3) <u>Ορισμός</u>: Ένα διάνυσμα $\vec{x}$ καλείται μοναδιαίο $\Leftrightarrow$
$\|\vec{x}\| = 1$

Αν $\vec{x} \in E$ και $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε το $\vec{x}$ ορίζει το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$. Τότε:

$$\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{x}\|} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \|\vec{x}\|^2 = 1$$

Θεώρημα: Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, τότε:

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ (*)

Απόδειξη: • Αν $\vec{y} = \vec{0}$, τότε $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = |\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle| = 0 =$

$= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{0}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

• Αν $\vec{y} \neq \vec{0}$, τότε θεωρούμε το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{z} = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$

Τότε $\|\vec{z}\| = 1$. Θέτωμε $\lambda = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \rangle =$

$= \frac{1}{\|\vec{y}\|} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ Άρα: $\lambda = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

$$\begin{aligned}
0 \leq \|\vec{x} - \lambda \vec{z}\|^2 &= \langle \vec{x} - \lambda \vec{z}, \vec{x} - \lambda \vec{z} \rangle \\
&= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \lambda \vec{z} \rangle - \langle \lambda \vec{z}, \vec{x} \rangle + \langle \lambda \vec{z}, \lambda \vec{z} \rangle \\
&= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \lambda^2 \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \\
&= \|\vec{x}\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 \|\vec{z}\|^2 \\
&= \|\vec{x}\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \|\vec{x}\|^2 - \lambda^2
\end{aligned}$$

Άρα $\|\vec{x}\|^2 - \lambda^2 \geq 0 \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 \geq \lambda^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\vec{x}\| \geq |\lambda| \Rightarrow \|\vec{x}\| \geq \left| \frac{1}{\|\vec{y}\|} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \right|$

$\Rightarrow \|\vec{x}\| \geq \frac{1}{\|\vec{y}\|} |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \Rightarrow$

$\Rightarrow |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

→ Στην ανισότητα των Caychy-Schwarz ισχύει η ισότητα $\iff \{\vec{x},\vec{y}\}$ Γ.Ε

Έστω $\{\vec{x},\vec{y}\}$ Γ.Ε. Τότε $\exists\, \kappa \in \mathbb{R} : \vec{y} = \kappa\vec{x}$

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| = |\langle \vec{x},\kappa\vec{x}\rangle| = |\kappa\langle \vec{x},\vec{x}\rangle| = |\kappa|\cdot\|\vec{x}\|^2 =$$
$$= |\kappa|\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|\cdot|\kappa|\cdot\|\vec{x}\| =$$
$$= \|\vec{x}\|\cdot\|\kappa\vec{x}\| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Rightarrow$$ η (*) ισχύει ως ισότητα

Αντίστροφα, έστω ότι $|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ $\boxed{**}$

Αν $\vec{y} = \vec{0}$ ή $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε $\{\vec{x},\vec{y}\}$ Γ.Ε.

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\vec{y} \neq \vec{0}$ ή $\vec{x} \neq \vec{0}$

$$\boxed{**} \Rightarrow \begin{cases} \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| & (a) \\ \text{ή} \\ \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = -\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| & (b) \end{cases}$$

Έστω ότι ισχύει η (a).

Τότε
$$\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle =$$
$$= \cancel{\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\rangle}_{1} - \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle - \left\langle \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\rangle + \cancel{\left\langle \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}, \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle}_{1} =$$
$$= 1 + 1 - 2\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle \overset{\boxed{**}}{=} 1 + 1 - 2 = 0$$

Άρα
$$\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = 0 \Rightarrow \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|}\vec{y}$$

$$\Rightarrow \{\vec{x},\vec{y}\} \text{ Γ.Ε}$$

(β) Αν $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, τότε θεωρούμε το
$\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} + \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} + \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle$

<u>άσκηση</u> $0 \Rightarrow \vec{x} = -\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|} \vec{y} \Rightarrow \{\vec{x}, \vec{y}\}$ Γ.Ε

→ Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in E$, όπου $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$.
Ανισότητα C-S $\Rightarrow |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \left| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right| \leq 1$$

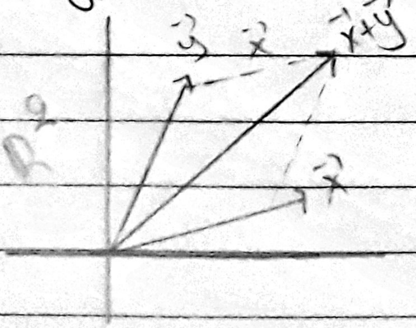
Τότε $\exists! \theta \in [0, \pi] : \cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

<u>Ορισμός</u>: Η <u>γωνία</u> των μη-μηδενικών διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ ορίζεται να είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$:
$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

Άρα, αν $\theta = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$, τότε : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\theta)$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in E$, όπου $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: Ευκλείδειος χώρος
Τότε : $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ Ανισότητα Minkowski
ή τριγωνική

<u>Απόδειξη</u>:



$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle =$
$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle =$
$= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$

$\leq \|\vec{x}\|^2 + 2|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \overset{C-S}{\leq}$

$\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$

Άρα $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Ισχύει ότι $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\vec{x}, \vec{y}\}$.Γ.Ε (άσκηση)